I. S. F. A. 2007-2008

Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice non autorisée

L'épreuve est composée de 3 exercices indépendants

EXERCICE 1 :

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 . Pour x réel supérieur à 1 on définit l'intégrale $G_n(x)$ par :

$$G_n(x) = \int_x^{\infty} \frac{\left[ln\left(\frac{u}{x}\right)\right]^n}{u^2 ln(u)^n} du$$

Montrer que l'intégrale $G_n(x)$ est convergente.

Dans le suite la fonction $G_n(x)$ est étudié sur l'intervalle $[1,\infty)$

2. Pour n entier supérieur ou égal à 1 et pour x strictement supérieur à 1 montrer que la fonction $G_n(x)$ est dérivable et montrer la relation :

$$G_n(x) - G_{n-1}(x) = \frac{x ln(x)}{n} G'_n(x) \quad (1)$$

Montrer que la fonction $x \to G_n(x)$ est décroissante sur $[1, \infty)$. Donner sa limite quand x tend vers $+\infty$.

3. Etude de la suite $n \to G_n(x)$ pour x supérieur ou égal à 1.

   a- Montrer que la suite $n \to G_n(1)$ est stationnaire. Donner son expression.

   b- Déduire de 2. que la suite $n \to G_n(x)$ est décroissante.

   c- Montrer que la suite $n \to G_n(x)$ est convergente et que pour $x > 1$ cette limite est nulle.

   Indication : On pourra écrire $\int_x^{\infty} \frac{\left[ln\left(\frac{u}{x}\right)\right]^n}{u^2[ln(u)]^n} du = \int_x^{x+\alpha} \frac{\left[ln\left(\frac{u}{x}\right)\right]^n}{u^2[ln(u)]^n} du + \int_{x+\alpha}^{\infty} \frac{\left[ln\left(\frac{u}{x}\right)\right]^n}{u^2[ln(u)]^n} du$ *et choisir α de manière judicieuse.*

4. Soit n entier supérieur ou égal à 1:

   a- Montrer la relation :

$$\frac{n}{n+1} G'_{n+1}(x) - G'_n(x) = \frac{G_n(x)}{x} \quad (2)$$

   b- Déduire des relations (1) et (2) que pour n entier supérieur ou égal à 1 la fonction $G_n(x)$ est dérivable deux fois sur $]1,\infty)$ et que ses dérivées première et seconde $G'_n(x)$ et $G''_n(x)$ vérifient :

$$x^2 ln(x) G''_n(x) + 2x ln(x) G'_n(x) - n G_n(x) = 0$$

5. Pour n entier supérieur ou égal à 1 on note E_n l'ensemble des fonctions $y(x)$ définie sur $]1,\infty)$ et telles que :

$$x^2 ln(x) y''(x) + 2x ln(x) y'(x) - n y(x) = 0$$

   a- Déterminer des éléments de E_n qui s'écrivent sous la forme d'un polynôme de degré n en $ln(x)$. Expliciter ces polynômes pour $n=1$ et $n=2$.

   b- En déduire la forme générale des éléments de E_n.

EXERCICE 2 :

Préliminaire :

1. Soit $\{u_n, n \in N\}$ une suite numérique telle que la suite $\{v_n = u_n - u_{n-1}, n \in N^*\}$ soit décroissante. Montrer que la suite $\{u_n, n \in N\}$ admet au plus un maximum strict.

2. Une entreprise commerciale est confrontée au problème d'optimisation suivant :
Chacun des jours d'une période de *N* jours elle propose à la vente un nombre entier constant (noté *k*) de produits. Le prix de vente d'un produit est noté α et son prix de fabrication est notée β. A la fin de chaque jour les produits invendus sont détruits.
La demande journalière est supposée connue et déterminée par la donnée d'une suite finie $\{j_n, n = 1, \dots, N\}$ d'entiers strictement positifs.
L'entreprise désire calculer le nombre *k* de produits à mettre en vente chaque jour de manière à maximiser son bénéfice calculé sur toute la période des *N* jours.
   a- Montrer que le bénéfice de l'entreprise (noté *B(k)*) ne dépend par de l'ordre des demandes journalières.
   b- On supposera par la suite que la suite finie $\{j_n, n = 1, \dots, N\}$ est croissante et on note, pour *k* positif ou nul, *g(k)* l'entier défini par :

$$g(k) = \begin{cases} Max\{n, j_n \leq k\} & si\ j_1 \leq k \\ 0\ sinon \end{cases}$$

.

   Exprimer en fonction de *k*, de α et de la suite $\{j_n, n = 1, \dots, N\}$ le cumul sur la période *[1,…N]* du montant notée $M(k)$ des ventes.
   Montrer la relation :

$$M(k+1) - M(k) = \alpha\, (N - g(k))..$$

   c- On suppose que $N\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ n'est pas un entier .En introduisant le cumul des coûts de fabrication sur la période montrer qu'il existe un unique entier *k* maximisant le bénéfice $B(k)$. Donner l'expression de cet entier *k* en fonction de α ,β et de la suite des $g(i)$.
   d- Pour $N=4$ $\alpha=2$; $\beta=1$; $j_n=2n$ calculer les suites *g(k) ; M(k) ; B(k)*. Donner les solutions possibles au problème d'optimisation.

3. Soit *j* une fonction définie sur l'intervalle [*0,T*] strictement positive, strictement croissante et dérivable. On définit la fonction *m* ainsi ;

$$m(x) = \int_0^T min(j(t), x)\,dt$$

Montrer que la fonction *m(x)* est dérivable. Donner l'expression de sa dérivée.
Pour $0 < \beta < \alpha$ on introduit la fonction *B(x)* par :

$$B(x) = \alpha\, m(x) - \beta T x\ .$$

Montrer que la fonction *B* s'annule en un unique point x_0 dont on donnera l'expression en fonction de α et de β et de la fonction *j*. Montrer que G est maximum en ce point.

4. Expliquer en quoi les questions 2. et 3. traitent du même problème d'optimisation mais dans des hypothèses temporelles et monétaires différentes. Que faudrait-il démontrer pour que les résultats de la question 3 aient le même degré de généralité que ceux de la question 2 ?.

EXERCICE 3

On note $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dont les éléments sont des réels. On exprimera qu'une matrice A de $M_n(R)$ a tous ses éléments positifs par la notation $A\geq 0$ (A est dite alors matrice positive). De même on exprimera que la matrice A a tous ses éléments strictement positifs par la notation $A>0$.

On note $M_n(C)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dans les éléments sont des nombres complexes. Pour A de $M_n(C)$ on note |A| la matrice positive dont les éléments sont les modules des éléments de A.

1. Etude de quelques propriétés des matrices positives :
   - a- Si on a $A \geq 0$ et $A \neq 0$ peut on affirmer : $A > 0$?
   - b- Montrer que pour $A \geq 0$ et $B > 0$ l'égalité $AB=0$ implique $A=0$.
   - c- Montrer que si $A > 0$ et B de $M_n(C)$ telles que $|A.B|=A.|B|$ alors il existe n réels $\theta_1, \theta_2 .. \theta_n$ tels que : $B=|B|D$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $e^{i\theta 1}, \ldots, e^{i\theta n}$

   Pour cela on pourra démontrer et utiliser le résultat suivant : Si $z_1,..,z_n$ sont des nombres complexes tels que : $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ *alors il existe un réel* θ *tel que pour tout i de [1,..,n]* $z_i = |z_i| e^{i\theta}$

2. On note P_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n positives et dont la somme des lignes est égale à 1.

   Soit X la matrice colonne à n lignes dont tous les éléments sont égaux à 1.
   - a- Pour une matrice A positive montrer que $AX=X$ si et seulement $A \in P_n$.
   - b- En déduire que si A et B sont des matrice de P_n alors leur produit AB appartient à P_n.
3. Soit une A une matrice de P_n.
   - a- Montrer que les valeurs propres de A réelles ou complexes sont toutes de module inférieur à 1.
   - b- On suppose que A est diagonalisable. Montrer que la suite de matrices $\{A^k, k \in N\}$ converge si et seulement si la valeur propre 1 est la seule valeur propre de module 1.
